MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Appunti di Analisi Matematica II

De Fusco Marco

15 luglio 2015

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Indice

1 Introduzione all'analisi 1
- 1.1 Prodotti scalari . . . 1
- 1.2 Norme . . . 1
  - 1.2.1 La norma ∞ . . . 1
  - 1.2.2 La norma 1 . . . 2
  - 1.2.3 La norma 2 . . . 2
  - 1.2.4 Disuguagliaza di Shwarz . . . 2
  - 1.2.5 Disuguaglianza di Minkowsky . . . 2
  - 1.2.6 Sfere . . . 3
  - 1.2.7 Norme equivalenti . . . 3
- 1.3 Coordinate polari . . . 4
- 1.4 Coordinate cilindriche . . . 5
- 1.5 Coordinate sferiche . . . 5
- 1.6 Topologia in $\mathbb{R}^n$ . . . 5
- 1.7 Successioni . . . 7
- 1.8 Funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ . . . 9
- 1.9 Funzioni da R^n in R^m . . . 12

I Calcolo differenziale **15**

2 Funzioni da R^n in R 17
- 2.1 Derivate parziali . . . 17
- 2.2 Interpretazione geometrica del gradiente e spazio tangente . . . 24
  - 2.2.1 Distanza di un chiuso da un punto . . . 25
- 2.3 Minimi e massimi locali . . . 26
  - 2.3.1 Gradiente in coordinate polari . . . 28

3 Applicazioni da R^n in R^m 31
- 3.1 Applicazioni vettoriali . . . 32

4 Curve 35
- 4.1 Curve regolari . . . 35
- 4.2 Retta tangente ad una curva . . . 36

5 Superfici 39
- 5.1 Superfici di rotazione attorno all'asse z . . . 40
  - 5.1.1 Sfera . . . 40
  - 5.1.2 Paraboloide . . . 41
  - 5.1.3 Toro . . . 41
  - 5.1.4 Cono . . . 41

5.1.5 Cilindro 41
5.2 Superfici quadriche 41
5.2.1 Elissoide 41
5.2.2 Iperboloide iperbolico 42
5.2.3 Iperboloide ellittico 42
5.2.4 Paraboloide ellittico 43
5.2.5 Paraboloide iperbolico 43
5.3 Piano tangente ad una superficie di $\mathbb{R}^3$ in un punto regolare 44

6 Funzioni implicite 45

7 Estremi vincolati 47

II Integrazione **51**

8 Integrali doppi 65

9 Integrali tripli 71
9.1 Volume di rotazione 71
9.2 Cambiamento di dominio 72

10 Integrali impropri e derivazione sotto il segno di integrazione 75

11 Integrali di linea e di superficie 77
11.1 Lunghezza di una curva 77

12 Campi vettoriali 79
12.1 Operatori differenziali su un campo: Divergenza e rotore 79
12.2 Campi conservativi e insiemi semplicemente connessi 80
12.2.1 Potenziale 80
12.2.2 Lavoro 80
12.3 Flusso 82

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Capitolo 1

Introduzione all'analisi

1.1 Prodotti scalari

Definizione Una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$, a cui è associata una matrice quadrata $n \times n$ A, si dice simmetrica se $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle_A = \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle_A \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione Una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$, a cui è associata una matrice quadrata $n \times n$ A, si dice definita positiva se $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle_A > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione Una forma bilineare simmetrica definita positiva si dice prodotto scalare. Il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$è associato all'identità su $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle_A = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

1.2 Norme

Definizione Una norma su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ che rispetta le seguenti proprietà:
omogeneità, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$;
disuguaglianza triangolare, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
separazione, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = 0$.
Ogni norma induce una distanza, definita come la norma della differenza tra due vettori. Ovvero: $d: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

1.2.1 La norma ∞

Definizione La norma ∞ è definita come $\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Esercizio Verificare che $\|\cdot\|_\infty$ sia una norma. Dimostriamo che $\|\cdot\|_\infty$ rispetta le tre proprietà sopraelencate.

Soluzione Omogeneità: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda x_i| = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{i=1,\dots,n} |x_i| =$
$= |\lambda| \|\mathbf{x}\|_\infty;$
Disuguaglianza triangolare: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq$
$\leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty;$
Separazione: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se $\|\mathbf{x}\|_\infty = \mathbf{0}$ allora $x \leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 0.$

1.2.2 La norma 1

Definizione La norma 1 è definita come $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{1=1}^n |x_i|$.

Esercizio Verificare che $\|\cdot\|_1$ sia una norma.

Soluzione Dimostriamo che $\|\cdot\|_1$ rispetta le tre proprietà sopraelencate.
Omogeneità: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{1=1}^n |x_i| =$
$= |\lambda| \|\mathbf{x}\|_1;$
Disuguaglianza triangolare: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_{1=1}^n |x_i + y_i| \leq$
$\leq \sum_{1=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1;$
Separazione: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se $\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{0}$ allora $x \leq \sum_{1=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1 = 0.$

1.2.3 La norma 2

Definizione La norma 2, o norma euclidea, è definita come $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{1=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Si dice norma di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare la quantità

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x} \rangle}$$

1.2.4 Disuguagliaza di Shwarz

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{xy}\| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$

$$\|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{xx} + \mathbf{x}\lambda\mathbf{y} + \lambda\mathbf{yx} + \lambda\mathbf{y}\lambda\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda(\mathbf{xy}) + \lambda^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \lambda^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq -2\lambda(\mathbf{xy}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sia} \quad \lambda = -\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} \quad \text{con} \quad \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \neq 0$$

$$\text{Allora} \quad 2\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2$$

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

1.2.5 Disuguaglianza di Minkowsky

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

$$\text{dunque} \quad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)$$